

# 偏平アーチの非線形振動に及ぼす 初期形状および境界条件の影響

高橋 和雄\*・太田 晶一\*\*

## Influence of the Initial Profile and the Boundary Conditions on Nonlinear Vibrations of an Arch with Small Rise

by

Kazuo TAKAHASHI\* and Shoichi OTA\*\*

Influences of the initial profile and the boundary conditions on nonlinear vibrations of an arch with small rise are discussed in the present paper. The equation of motion is solved by a Galerkin method and the harmonic balance method. From numerical results, the following conclusions are obtained. The influence of the initial profile on nonlinear vibrations is small. However, linear free vibrations, nonlinear free vibrations and forced vibrations are influenced by the difference of the boundary conditions.

### 1. はじめに

近年、構造物の大規模化、都市景観への関心の高まりおよび構造部材の使用効率の良さなどから、長さに比べて板厚が小さい薄肉材や薄板が採用されている。この種の薄肉構造部材では、製作過程、支持部の出来具合および自重の影響などによってライズが必ず存在する。このようなライズをもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり、偏平アーチとみなすことができる。このような偏平アーチを1自由度系とみなした解析はかなり行われている(文献1の文献参照)。著者らは、境界条件が両端ヒンジで正弦波を初期形状にもつ偏平アーチを1自由度系に近似し、非線形振動特性に及ぼすライズ比の影響およびカオスの存在について明らかにした<sup>1)</sup>。また、偏平アーチは連続体であることから、2自由度近似し、3次対称振動の非線形振動特性および1次対称振動近傍の分岐振動に及ぼす3次対称振動の影響について解析した<sup>2)</sup>。しかし、偏平アーチの非線形振動<sup>3),4)</sup>、動座屈<sup>5),6)</sup>、カオスなどにライズの大きさの他に初期形状が影響を及ぼし、また、

境界条件が異なる場合に、端部の曲げに対する拘束度の大きさの違いにより非線形振動特性が異なることが予想される。

そこで、本研究では、偏平アーチの非線形振動に及ぼす初期形状および境界条件の影響を解析する。解析方法として、両端で軸方向変位が拘束された偏平アーチの運動方程式を、多自由度の振動系にモデル化した後、Galerkin法を用いて常微分方程式に変換する。

次に、境界条件が両端ヒンジで、等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチを2自由度系に近似し、常微分方程式の周期解を求めるために調和バランス法を用いて、連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson法により数値解析を行い、初期形状が非線形振動特性に及ぼす影響を明らかにする。また、境界条件が両端固定の偏平アーチを1自由度系に近似し、調和バランス法を用いて数値解析を行う。カオスおよび非周期解に関しては、Runge-Kutta-Gill法による時間応答解析を用い、境界条件が非線形振動特性に及ぼす影響の解析を行う。

平成9年10月28日受理

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*長大(株) (Chodai Co. Ltd.)

## 2. 運動方程式の誘導

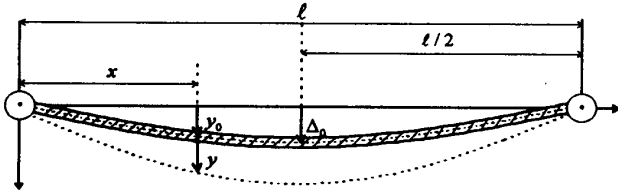


Fig. 1 Geometry of shallow arch.

Fig. 1 に示すような偏平アーチ（ライズの大きさがはりの回転半径程度）に周期的変動荷重が作用する場合の非線形曲げ振動の運動方程式は次のように与えられる<sup>1)</sup>。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 $E$ ：ヤング率， $I$ ：断面 2 次モーメント， $\rho$ ：密度， $A$ ：断面積， $l$ ：スパン長， $y$ ：たわみ， $x$ ：スパン方向の座標， $y_0$ ：初期形状， $p_0$ ：荷重強度， $\Omega$ ：荷重の円振動数， $t$ ：時間。

初期形状は境界条件を満足しなければならないので、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \quad (2)$$

ここに  $\Delta = \Delta_0/r$ ：ライズ比， $\Delta_0$ ：ライズ， $r$ ：回転半径， $\bar{X}(x)$ ：初期形状の形状関数。

式(1)の解を次の変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (3)$$

ここに、 $X_n$ ：座標関数， $T_n$ ：未知の時間関数。

式(3)の座標関数  $X_n$  としてライズが零の直線ばりの固有振動形を用いる。式(2)、式(3)を式(1)に代入し、Galerkin 法を適用すれば次のような時間に関する多自由度の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k \\ & + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left( Q_k^0 R_{ln} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{kl} \right) T_k T_l \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m \\ & = \gamma_n p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n/\lambda_1)^2$ ， $S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^l \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi$ ，

$$Q_k^0 = \int_0^l \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi, \quad R_{lm} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^l \frac{d^2 X_l}{d\xi^2} X_m d\xi,$$

$$P_{kl} = \int_0^l \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi,$$

$$B_{klm}^n = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \int_0^l \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n),$$

$$\gamma_n = \int_0^l X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n), \quad X_n = \int_0^l X_n^2 d\xi,$$

$$p = p_0 l^4 / EI r,$$

$\lambda_1 = l^4 \sqrt{\rho A \omega_1^2 / EI}$ ， $\omega = \Omega / \omega_1$ ， $\omega_1$ ：ライズのないはりの線形 1 次固有円振動数， $\tau = \omega_1 t$ ， $\xi = x/l$

## 3. 初期形状の影響

### 3.1 等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチへの適用

境界条件が両端ヒンジで等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの対称振動を考える。初期形状の関数として  $\bar{X} = 3.2 (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$  を用い、系を 1 次対称振動と 3 次対称振動の 2 自由度系に仮定し線形減衰力を考慮すれば、時間に関する非線形運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_1 + 2 h_1 \alpha_1 \dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + 0.0187 \Delta^2 T_3 + 0.7529 \Delta T_1^2 \\ & + 2.2592 \Delta T_3^2 + 0.0186 \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1 T_3^2 + \frac{1}{4} T_1^3 \\ & = \frac{4}{\pi^5} p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_3 + 2 h_3 \alpha_3 \dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 + 0.0187 \Delta T_1 + 0.0092 \Delta T_1^2 \\ & + 0.2510 \Delta T_3^2 + 4.5173 \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1^2 T_3 + \frac{81}{4} T_3^3 \\ & = -\frac{4}{3\pi^5} p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $\alpha_1 = \sqrt{1 + 0.5039 \Delta^2}$ ， $\alpha_3 = \sqrt{81 + 0.0007 \Delta^2}$ 。

Table 1 は前報の初期形状が正弦波の場合<sup>2)</sup> と本研究の等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合の時間に関する非線形運動方程式の係数を示している。両者に共通する単独項および連成項の係数の差は十分に小さい。また、初期形状が正弦波の場合に存在しない単独項および連成項の係数に注目すると、 $n=1$  の 1 次対称振動の場合では、係数は十分に小さいが、 $n=3$  の 3 次対称振動の場合に、係数の大きさが無視できない単独項  $0.25 \Delta T_3^2$  が存在する。単独項  $0.25 \Delta T_3^2$  はライズ比を介する 2 次の非線形項であり、偏平アーチの 3 次対称振動の非線形振動特性に影響を及ぼすことが予想される。

Table 1 The coefficients of ordinary differential equations for the time functions  
(a) sin curve  
(b) deflection curve.

	n = 1		n = 3	
	(a)	(b)	(a)	(b)
$a_n$	$\sqrt{1+0.5\Delta^2}$	$\sqrt{1+0.503\Delta^2}$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{81+0.0007\Delta^2}$
$T_1$	—	—	—	—
$T_3$	—	$0.02\Delta^2$	81	$81+0.0007\Delta^2$
$T_1^2$	$0.75\Delta$	$0.752\Delta$	—	$0.009\Delta$
$T_3^2$	$2.25\Delta$	$2.259\Delta$	—	<b><math>0.25\Delta</math></b>
$T_1^3$	0.25	0.25	—	—
$T_3^3$	—	—	20.25	20.25
$T_1T_3$	—	$0.02\Delta$	$4.5\Delta$	$4.517\Delta$
$T_1^2T_3$	—	—	2.25	2.25
$T_1T_3^2$	2.25	2.25	—	—

### 3.2 調和バランス法による解析

本研究では3.1節で述べたように非線形振動特性に及ぼす初期条件の影響が予想される3次対称振動について解析を行うために、式(5)、(6)の解を本研究では次式のように仮定する。

$$T_1 = c_{10} + c_{11/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{11/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + C_{11} \cos \omega \tau + s_{11} \sin \omega \tau \quad (7)$$

$$T_3 = c_{30} + c_{31} \cos \omega \tau + s_{31} \sin \omega \tau + c_{32} \cos 2\omega \tau + s_{32} \sin 2\omega \tau \quad (8)$$

ここに、 $c_{10}, c_{11/2}, s_{11/2}, c_{11}, s_{11}, c_{12}, s_{12}$  : 1次対称振動の振幅成分、 $c_{30}, c_{31}, s_{31}, c_{32}, s_{32}$  : 3次対称振動の振幅成分。

式(7)、(8)を式(5)、(6)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これにNewton-Raphson法を用いて解けば、定常振動の振幅成分が得られる。

### 3.3 数値結果

Table 2は、両者の3次対称振動の非線形自由振動曲線における、同じ無次元振幅  $c_{31}$  に対する無次元振動数  $\omega$  の値をライズ比  $\Delta = 1.0 \sim 5.0$  の場合について示す。単独項  $0.25\Delta T_3^2$  が存在しない正弦波の場合と比較すると、無次元振幅が小さい場合には、ライズ比が増大するほど単独項  $0.25\Delta T_3^2$  が及ぼす影響は増加し、同じ無次元振幅において無次元振動数は増大する。

無次元振幅が増加すると、両者の無次元振動数の差は小さくなっていく。

以上より、正弦波を初期形状にもつ偏平アーチと等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチについて、時間に関する非線形運動方程式の係数に大きな違いは見られず、非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さい。

Table 2 Nonlinear free vibrations of the third mode  
(a) sin curve  
(b) deflection curve.

$\Delta$	10.0		12.0		14.0		16.0		18.0	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
1.0	1.17	1.16	2.07	2.06	2.78	2.77	3.42	3.41	4.02	4.02
2.0	1.31	1.26	2.17	2.15	2.86	2.84	3.48	3.47	4.07	4.07
3.0	1.48	1.4	2.33	2.27	2.98	2.94	3.58	3.55	4.16	4.14
4.0	1.64	1.54	2.53	2.43	3.15	3.08	3.73	3.67	4.29	4.24
5.0	1.75	1.66	2.75	2.62	3.35	3.25	3.9	3.82	4.44	4.37

## 4. 境界条件の影響

### 4.1 境界条件が両端固定の偏平アーチへの適用

両端固定の偏平アーチが、初期形状の関数として座屈波形  $\bar{X} = \sin^2 \pi \xi$  をもつ場合に、系を1自由度系と仮定し線形減衰力を考慮すれば、時間に関する非線形運動方程式は次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + 0.1801\Delta T_1^2 + 0.05994T_1^3 = 0.002636 p \cos \omega \tau \quad (9)$$

ここに、 $h_1$  : 減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1+0.1202\Delta^2}$  : 1次固有円振動数。

### 4.2 調和バランス法による解析

1次対称振動の1/2分数調波共振を求めるために、式(9)の解を次式のように仮定する。

$$T_1 = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_1 \cos \omega \tau + s_1 \sin \omega \tau \quad (10)$$

ここに、 $c_0, c_1, s_1$  : 付随型の振幅成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$  : 分岐型の振幅成分。

式(10)を式(9)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られ、これにNewton-Raphson法を用いて解けば、振幅成分が得られる。

### 4.3 時間応答解析

$T_1 = P_1$ ,  $\dot{T}_1 = P_2$  とおくと, 式(9)は次に示す2個の1階常微分方程式に変換することができる.

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h\alpha_1 P_2 - \alpha_1^2 P_1 - 0.1801\Delta P_1^2 \\ &\quad - 0.05994P_1^3 + 0.002636p \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (11)$$

この式に Runge-Kutta-Gill 法を用いて, 時間応答解析を行う.

### 4.4 数値結果

#### (a) 線形自由振動の特性

両端固定の偏平アーチの1次対称, 3次対称振動, 2次逆対称振動を対象に線形自由振動の特性について解析を行う. 4.1節に示した誘導を非線形項を無視して行えば, 時間に関する線形運動方程式は, 次式となる.

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{T}_2 + 2h_2\alpha_2\dot{T}_2 + \alpha_2^2 T_2 = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{T}_3 + 2h_3\alpha_3\dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 = 0 \quad (14)$$

ここに,

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + 0.1202\Delta^2} : 1 \text{ 次対称固有円振動数}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{7.5982} = 2.7565 : 2 \text{ 次逆対称固有円振動数}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{29.2023 + 0.1291\Delta^2} : 3 \text{ 次対称固有円振動数}$$

上式の固有振動数と求めれば, 線形自由振動数が得られる.

Fig. 2 は, 境界条件が両端固定の場合の偏平アーチのライズ比と無次元線形固有振動数  $n_1$  の関係を1次対称, 3次対称振動および2次逆対称振動について示す. ライズの大きさは回転半径  $r$  程度であるから<sup>1)</sup>, ライズの大きさは10まで表示している.

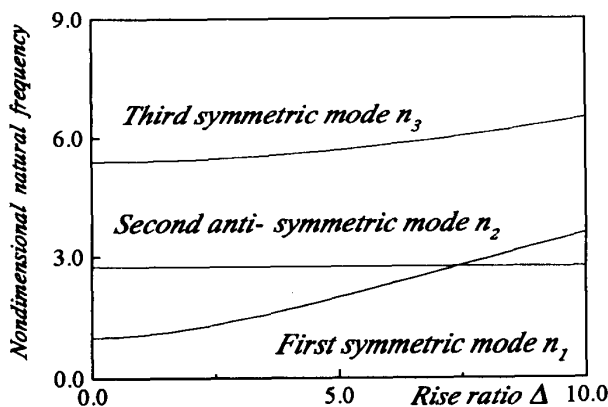


Fig. 2 Rise ratio vs. non-dimensional natural frequency.

境界条件がヒンジの場合は, 1次対称振動の線形固有振動数以外は, ライズ比  $\Delta$  の影響を受けずに一定の値であつた<sup>2)</sup>, 境界条件が固定の場合には, 1次対称振動のみでなく, 3次対称振動の線形固有振動数もライズ比  $\Delta$  の影響を受け, ライズ比  $\Delta$  の増大と共に増加する. 一方, 2次逆対称振動の線形固有振動数は, ライズ比  $\Delta$  の影響を受けずに一定値をとる. したがって, 2次逆対称振動の線形固有振動数は初期形状すなわちライズの影響を受けない. また, 境界条件が固定では, 境界条件がヒンジの場合に比べ, 各モードの線形固有振動数の値が接近し, 振動モード間の連成が予想される.

#### (b) 非線形自由振動の特性

Fig. 3 は, 境界条件が固定の場合の1次対称振動の非線形自由振動曲線をライズ比をパラメーターに示す. 減衰定数  $h=0.0$  の非減衰振動を対象としている. 横軸は非線形円振動数をライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元振動数, 縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅である.

$\Delta=0.0$  のときは, 振幅の変動成分  $c_1$  は無次元振動数とともに単調に増加するのみであるが, ライズ比が大きくなるとライズの影響が効いてくる. この時の無次元振動数  $\omega$  の増加とともに, 振幅の変動成分  $c_1$  は減少する軟化バネの挙動を示す. さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると, 振幅の変動成分  $c_1$  は無次元振動数  $\omega$  の増加する硬化バネの挙動を示す. 境界条件が両端ヒンジの場合と比べると両端固定の場合の方がライズの影響は小さく, 軟化・硬化バネ特性はあまり強く現れない.

以上より, 境界条件が異なる場合でも, ライズの影響を受け, 振幅に大きさにより軟化・硬化バネの両特

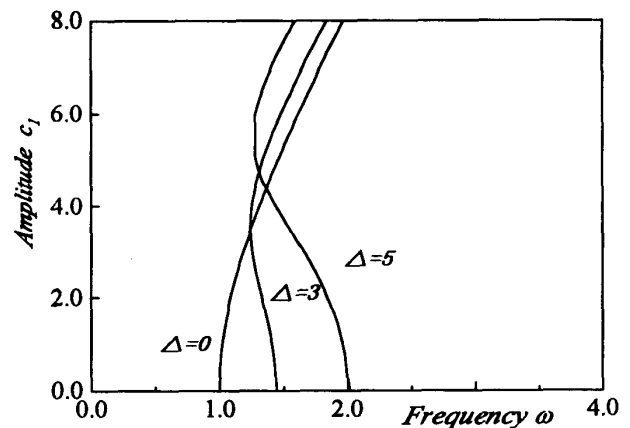


Fig. 3 Amplitude-frequency curves of the first mode with  $h_1=h_3=0.0$ .

性をもつ。また、境界条件が両端ヒンジに比べ両端固定の方が軟化・硬化バネ特性は強くない。

### (c) 荷重－変位曲線の特性

Fig. 4 は、境界条件が固定の場合の偏平アーチの静的荷重－変位曲線を示している。横軸は静的応答成分  $c_0$  を、縦軸は荷重強度  $p$  である。

ライズ比  $\Delta = -3.0$  程度までは静的応答成分  $c_0$  は、荷重とともに単調に増加するのみであるが、ライズがマイナス方向に大きくなり、ライズ比  $\Delta = -5.0$  以上（絶対値が増加）になると釣合荷重に極値が存在し、飛び移り座屈が可能となる。本研究では、対称な偏平アーチに対称に分布する荷重が作用する場合を対象とするため、これらの変形は、偏平アーチの中央に対して対称である。

飛び移り座屈が可能な釣合荷重の極値について境界条件が両端ヒンジの場合と比較すると両端固定の場合の方が釣合荷重の極値はかなり高く、動座屈は生じにくい。

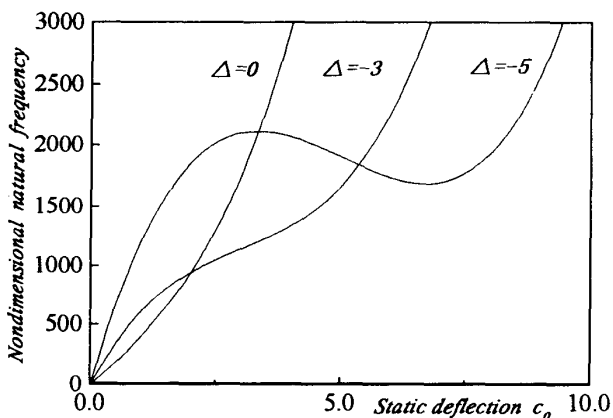


Fig. 4 Static load-deflection curves.

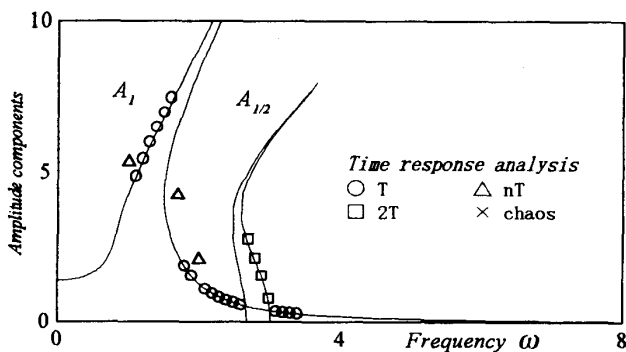


Fig. 5 Amplitude-frequency curves with  $\Delta = 3.0$ ,  $h = 0.005$ ,  $p = 1017.8$ .

### (d) 応答曲線の特性

Fig. 5 に両端固定の偏平アーチのライズ比  $\Delta = 3.0$ 、減衰定数  $h_1 = 0.05$  の無次元加振円振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_1, A_{1/2}$  との関係を示す。境界条件が異なる場合については、式(9)に  $\Delta T_1^2$  が含まれるため主調波応答  $A_1$ 、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  ともにライズ比の影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性もつが、両端ヒンジの場合に比べて両端固定の場合がライズ比の影響が小さい。これは、式(9)のライズ比を含んだ2次の非線形項の係数が両端ヒンジの場合に比べて両端固定の場合が小さいことに起因する。また、1次対称振動の1/2分数調波共振近傍に現れるカオスについて、境界条件が両端固定の場合は発生しない。

### 5. まとめ

本研究では、偏平アーチの非線形振動特性に及ぼす初期形状および境界条件の影響について解析を行った。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

- (1) 偏平アーチの非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さい。
- (2) 両端固定の偏平アーチに無次元線形固有振動数は、1次対称振動のみならず、3次対称振動の場合にもライズ比の影響を受けて変化する。
- (3) 応答曲線はライズの影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性を示すが、境界条件が両端固定の場合にライズの影響が小さい。
- (4) 両端固定の偏平アーチの方が、1次対称振動の1/2分数調波共振近傍に現れるカオスについて発生しない。

今後、多自由度系として係数励振振動による連成現象、偏平アーチの動的な座屈現象とそのメカニズムの解明などを明らかにする必要がある。また、実験におけるカオスの確認も今後の課題である。

なお、数値計算には長崎大学総合情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

### 参考文献

- 1) 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動とカオス解析, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.55~61, 1996.3.
- 2) 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動解析—多自由度系としての解析—, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.89~96, 1997.4.
- 3) Plaut, R.H. and Hsieh, J.-C.: Oscillations and In-

- stability of a Shallow Arch under Two-Frequency Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, No.2, pp.189~201, 1985.
- 4) Yamaki, N. and Mori, A.: Non-linear Vibrations of a Clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement, Part I: Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol.71, No.3, pp.333~346, 1980.
- 5) Leung, A.Y.T. and Fung, T.C.: Nonlinear Steady State Vibration and Dynamic Snap Through of Shallow Arch Beams, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, pp.409~430, 1990.
- 6) 村田 賢, 安江 博: 周期外乱を受ける偏平アーチの動座屈, 日本建築学会構造系論文集, 第469号, pp.71~80, 1995. 3.